



**EXERCICE N° 1**

Soit la suite U définie sur IN par: 
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{IN}$  on a:  $u_n > 1$ ,  
b) Etudier la monotonie de la suite U.
  
- 2) Soit v la suite définie sur IN par  $v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1}$ .  
a) Montrer que la suite v est arithmétique dont-on précisera son premier terme et sa raison.  
b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de n  
c) Déterminer la limite de U.

**EXERCICE N° 2**

Soit U la suite réelle définie sur IN par 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{\sqrt{3 + u_n^2}} \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{IN}$  on a :  $0 \leq u_n \leq 1$
  
- 2) a) Montrer que pour  $n \in \mathbb{IN}$  on a :  $u_{n+1} \geq \frac{1 + u_n}{2}$   
b) Etudier la monotonie de la suite U
  
- 3) a) Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{IN}$  on a :  $1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1 - u_n)$   
b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{IN}$  on a :  $0 < 1 - u_n < (\frac{1}{2})^n$

**EXERCICE N° 3**

Soit la suite  $u_n$  définie sur IN par  $u_0 = 9$  et pour tout n de IN :  $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 9}{2u_n}$

- 1) Montrer par récurrence que :  $u_n > 3$  pour tout n entier naturel
  
- 2) On pose  $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 3}$

a) Etablir que  $u_{n+1} - 3 = \frac{(u_n - 3)^2}{2u_n}$  et  $u_{n+1} + 3 = \frac{(u_n + 3)^2}{2u_n}$

- b) En déduire  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$

c) Démontrer par récurrence que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ :  $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$

#### **EXERCICE N° 4**

On considère la suite  $(U_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout entier  $n$  on a :  $U_n > 0$
- 2) Montrer que pour tout entier  $n$  on a :  $U_{n+1} > U_n$
- 3) On pose  $V_n = u_n^2$ 
  - a) Montrer que  $V_n$  est une suite arithmétique
  - b) Calculer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$
- c) Donner en fonction de  $n$  la valeur de  $S = \sum_{k=1}^n v_k$

#### **EXERCICE N° 5**

On considère la suite réelle  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2 + U_n} \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $U_n \geq 0$ 
  - b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $U_{n+1} - U_n = \frac{-u_n(1+u_n)}{2+u_n}$
  - c) Etudier la monotonie de la suite  $(U_n)$
- 2) Soit  $V$  la suite réelle définie par :  $V_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ 
  - a) Montrer que  $V$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$
  - b) Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .
  - c) Calculer la limite de la suite  $U$ .